ESPONENZIALI E LOGARITMI

Data una espressione del tipo $\boxed{a^b = c}$, che chiameremo notazione esponenziale (e dove **a>0**), stabiliamo di scriverla anche in un modo diverso: $\boxed{\log_a c = b}$ che chiameremo logaritmica (e si legge "il logaritmo in base a di c è uguale a b").

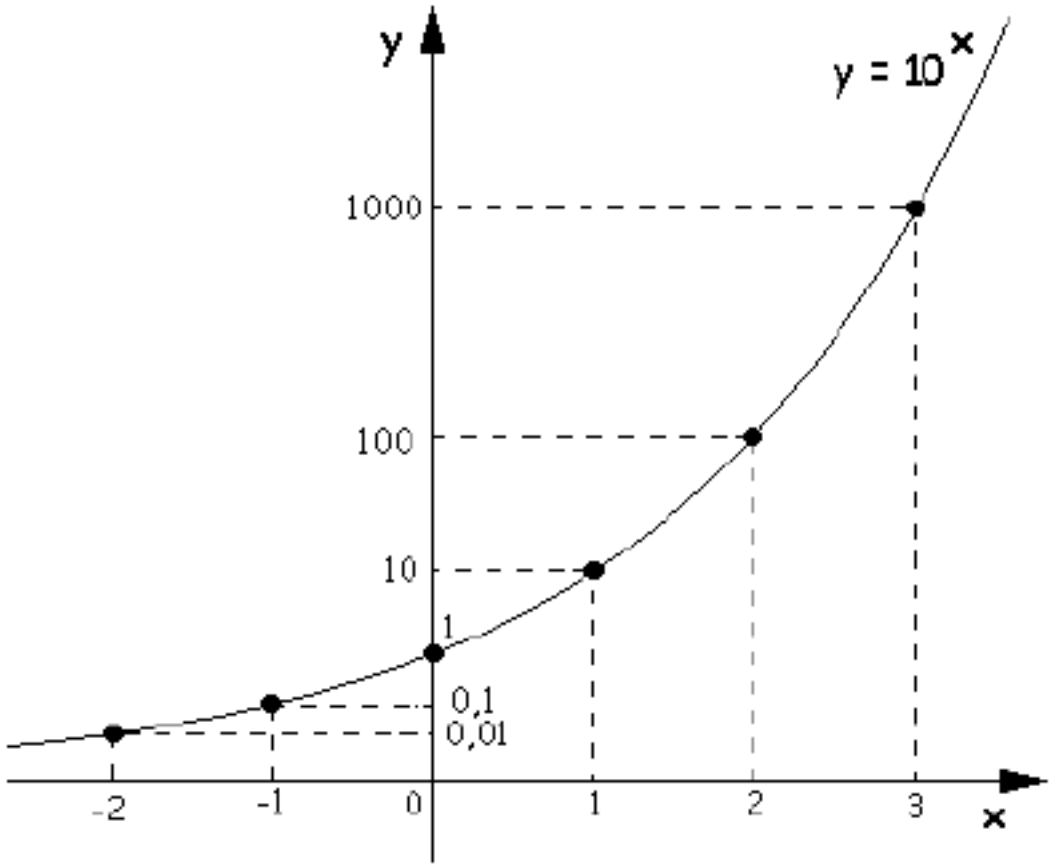
Questi sono due modi differenti per scrivere la stessa espressione.
Così per esempio $\log_3 81 = 4$ può essere scritta anche sotto la forma $3^4 = 81$.
Capiremo in seguito i vantaggi che si hanno scrivendo le espressioni in forma logaritmica.
Le basi più usate per i logaritmi sono il numero 10 (ed in questo caso si hanno i logaritmi decimali), ed il numero irrazionale e (e = 2,71… numero di Eulero. In questo caso i logaritmi si chiamano naturali).
Per evitare di scrivere la base talvolta si usa scrivere semplicemente log per i logaritmi decimali e ln per i logaritmi naturali.

FUNZIONI ESPONENZIALI

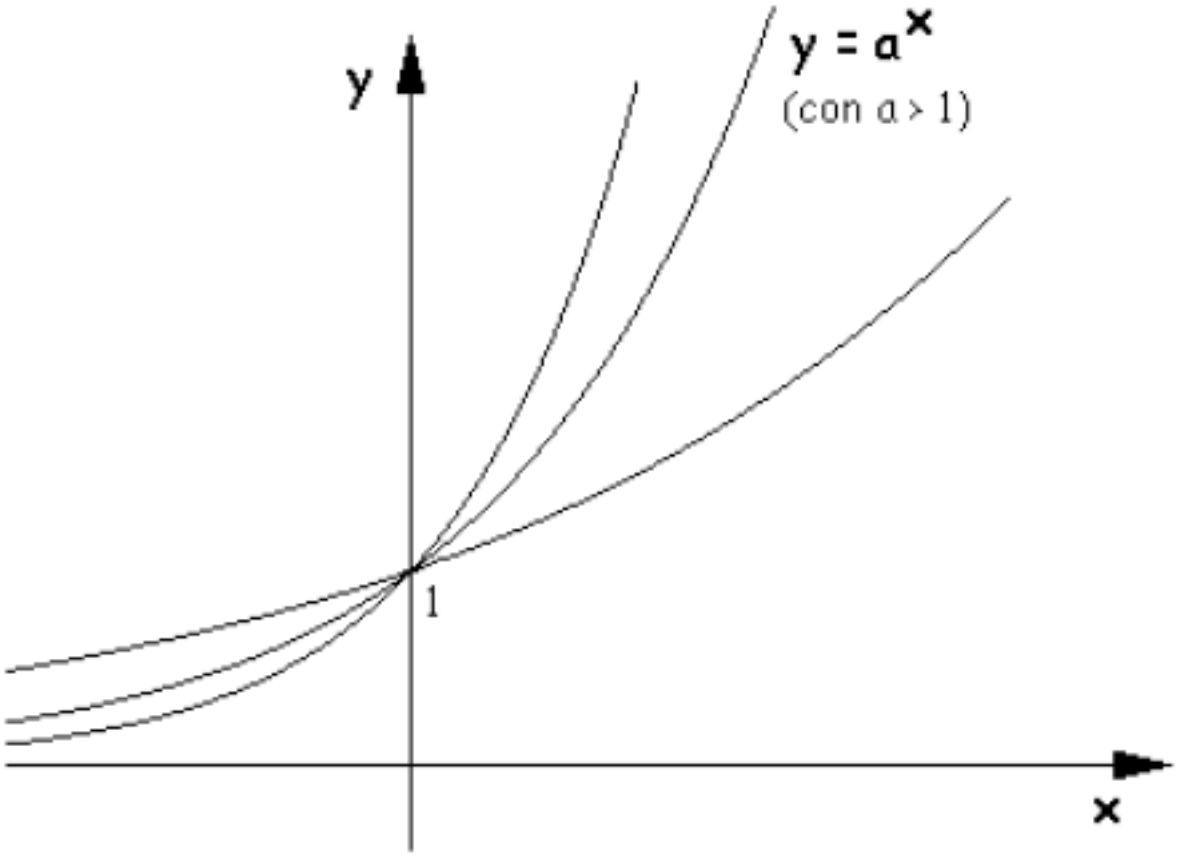
Consideriamo la notazione esponenziale come una funzione, in cui c = y, b = x ed a = 10, essa diviene la funzione

$$y = 10^x$$

Determiniamo alcuni suoi punti ponendo x=1, 2, 3, -1, -2, ecc, allo scopo di poterne intuire il grafico.
Si ottiene la curva seguente:



Questa curva (il grafico della **funzione esponenziale di base maggiore di 1**) ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle y positive, di attraversare l'asse y nel punto di ordinata 1, di tendere verso l'alto all'aumentare delle x, e di avvicinarsi sempre più all'asse x al diminuire delle x (cioè verso sinistra). Occorre notare una caratteristica molto importante: se cambiamo la base e mettiamo al posto di 10 un qualsiasi altro numero (maggiore di 1), la curva mantiene le sue caratteristiche: varia solo la sua curvatura.



Chiamiamo f(x) la funzione dell'esempio precedente: $f(x) = 10^x$

Consideriamo la funzione

$$f(-x) = 10^{-x}$$

Essa è una **funzione esponenziale con la base minore di 1** , infatti

$$10^{-x} = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

Il suo grafico è il simmetrico del grafico di f(x) rispetto all'asse y e le caratteristiche di questa curva si deducono dalle proprietà della simmetria assiale.
Questa curva ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle y positive, di attraversare l'asse y nel punto di ordinata 1, di tendere verso l'alto al diminuire delle x, e di avvicinarsi sempre più all'asse x all'aumentare delle x (cioè verso destra). Tutte le funzioni esponenziali con base 0<a<1 condividono questo andamento.

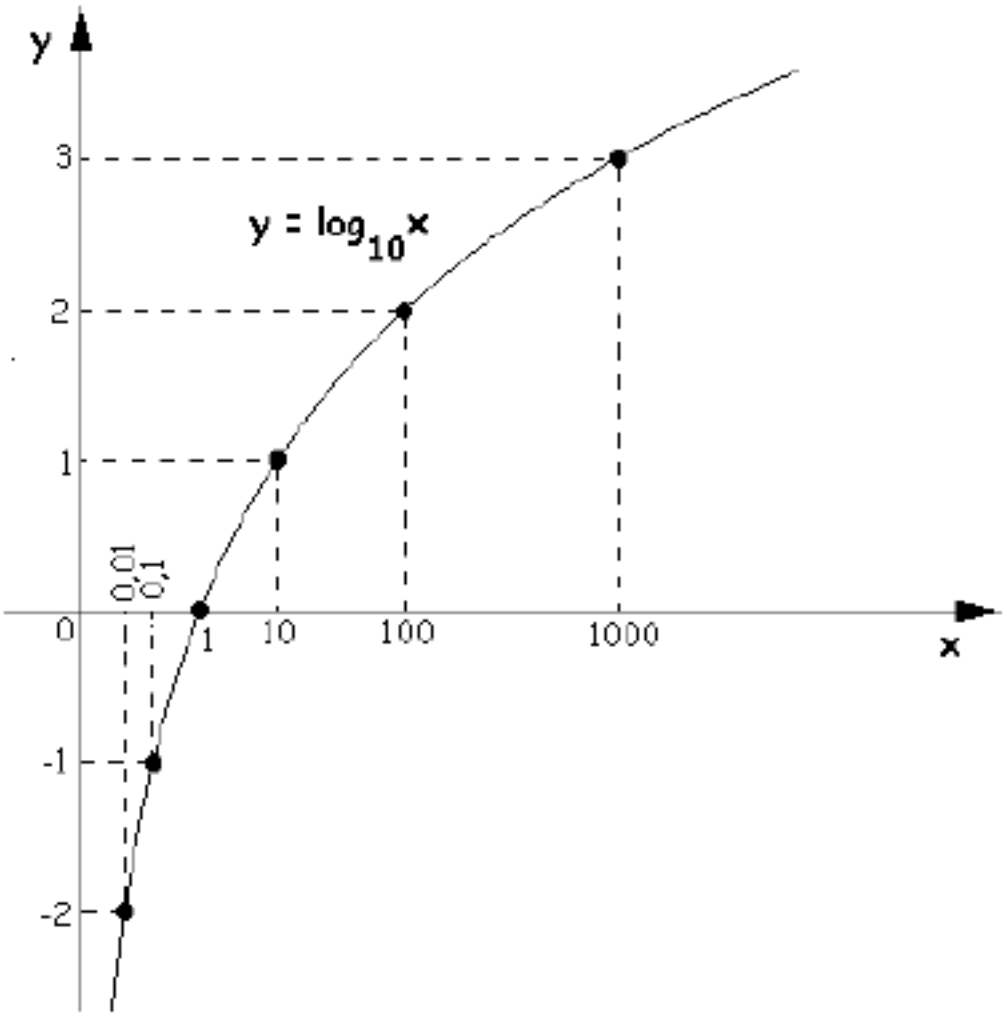
Riassumendo, le funzioni esponenziali sono definite su $\mathbb{R}$, hanno immagine in $(0,+\infty)$ e sono monotòne (crescenti, se la base è maggiore di 1, altrimenti decrescenti). L'unica intersezione con gli assi è con l'asse y nel punto (0,1).

FUNZIONI LOGARITMICHE

In modo analogo a quanto fatto per la notazione esponenziale, consideriamo anche la notazione logaritmica come una funzione, in cui c = x, b = y ed a = 10, essa diviene la funzione

$$f(x) = \log_{10}(x)$$

Determiniamo alcuni suoi punti ponendo x = 1, 2, 3, −1, −2, ecc, e otteniamo la curva seguente



Questa curva (il grafico della **funzione logaritmica di base maggiore di 1**) ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle x positive, di attraversare l'asse x nel punto di ascissa 1, di tendere verso l'alto all'aumentare delle x, e di avvicinarsi sempre più all'asse y quando la x tende a zero. La funzione è crescente.

Si noti che

- La funzione non esiste per x negative, quindi <u>il logaritmo di un numero negativo non esiste</u>.
- La funzione tende a $-\infty$ quando x si avvicina al valore 0
- La funzione ha valori negativi per x compreso fra 0 ed 1.
- La funzione vale 0 per x = 1
- La funzione assume valori positivi per x maggiore di 1.

Anche per la funzione logaritmica, se cambiamo la base e mettiamo al posto di 10 un qualsiasi altro numero (maggiore di 1), la curva mantiene le sue caratteristiche: varia solo la sua curvatura.

Cosa dire delle **funzioni logaritmiche con base minore di 1**?

Chiediamo ancora aiuto alle proprietà delle potenze (della notazione esponenziale) e alle simmetrie.

Se $10^3 = 1000$ allora (per definzione) $\log_{10} 1000 = 3$.

Poi, sappiamo anche che se $10^3 = 1000$ allora $\left(\frac{1}{10}\right)^{-3} = 1000$

quindi $\log_{\frac{1}{10}} 1000 = -3$ e questo è vero per tutti i numeri x, non solo per x=1000.

Quindi per ogni x>0

$$\log_{\frac{1}{10}}(x) = -\log_{10}(x)$$

e i grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto all'asse x. Come già visto nelle funzioni esponenziali, le caratteristiche di questa curva si deducono dalle proprietà della simmetria assiale.

La funzione $f(x) = \log_a(x)$ quando la base è 0<a<1 ha la caratteristica di essere sempre compresa nel semipiano delle x positive, di attraversare l'asse x nel punto di ascissa 1, di tendere verso l'alto al diminuire delle x verso x=0, e di avvicinarsi sempre più all'asse y all'aumentare di x. La funzione è decrescente.

Notiamo poi che

- La funzione non esiste per x negative, quindi <u>il logaritmo di un numero negativo non esiste, qualunque sia la base in cui è calcolato</u>.
- La funzione tende a $+\infty$ quando x si avvicina al valore 0
- La funzione ha valori negativi per x maggiore di 1.
- La funzione vale 0 per x = 1.
- La funzione assume valori positivi per x compreso fra 0 ed 1.

<u>Riassumendo</u>, le funzioni logaritmiche sono definite su $(0,+\infty)$, hanno per immagine l'insieme $\mathbb{R}$ e sono monotòne (crescenti, se la base è maggiore di 1, altrimenti decrescenti). L'unica intersezione con gli assi è con l'asse x nel punto (1,0).

Notiamo ora una caratteristica molto importante che lega fra loro le funzioni esponenziale e logaritmica.
Partiamo dalle due notazioni iniziali, ed in entrambe operiamo la stessa sostituzione (b = x e c = y):

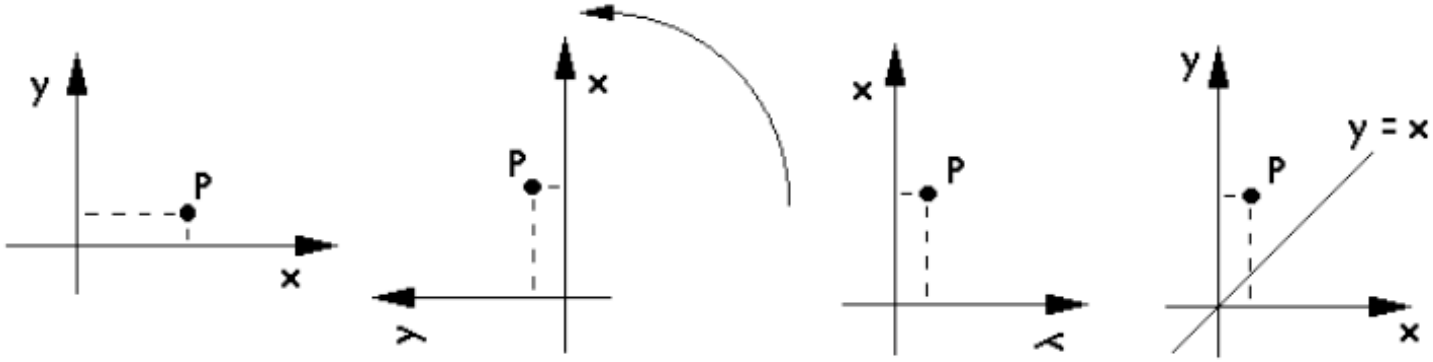
$$a^b = c \qquad \log_a c = b \longrightarrow y = a^x \qquad x = \log_a y \longrightarrow y = a^x \qquad y = \log_a x$$

notazioni esponenziale e logaritmica

Pongo in entrambe b=x e c=y

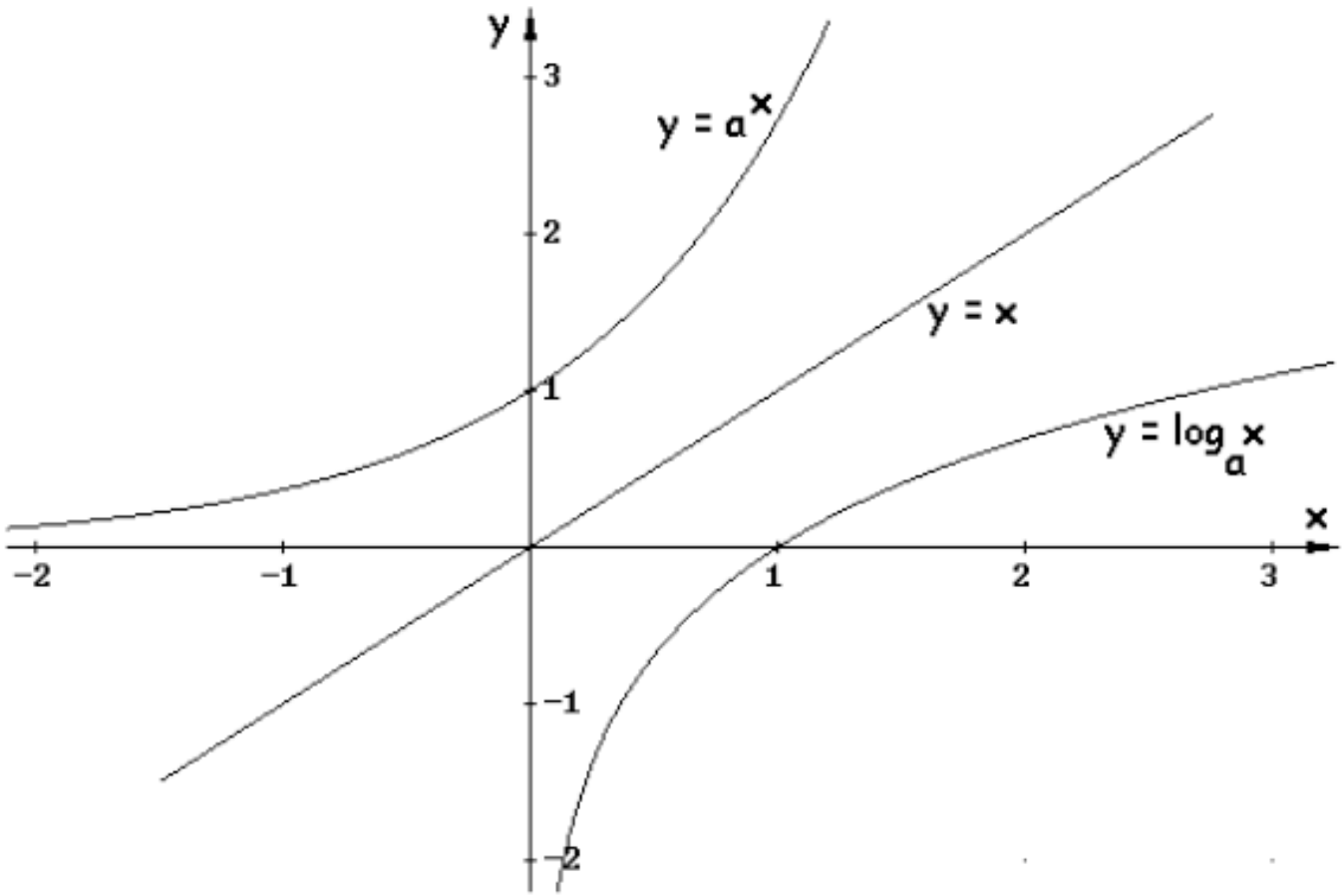
Scambio la x con la y nella seconda funzione

Così ho le due funzioni, esponenziale e logaritmica, relative alla medesima base a (supponiamo per semplicità a>1).
Dal passaggio intermedio, si intuisce che le due funzioni rappresentano (in modo diverso) la medesima relazione.
L'ultimo passaggio, poi, ci dice di scambiare la x con la y nell'equazione $x = \log_a y$.
Ma dal punto di vista grafico cosa significa scambiare la x con la y?
Osserviamo le fasi illustrate qui sotto:



Partendo dal primo grafico realizziamo una rotazione di 90° in verso antiorario (secondo grafico). Poi eseguiamo una riflessione attorno all'asse verticale (terzo grafico). Infine scambiamo la x con la y (quarto grafico).
Abbiamo ottenuto lo scambio fra i due assi e confrontando il primo grafico con l'ultimo, ci accorgiamo che in realtà abbiamo effettuato un ribaltamento di 180° attorno alla bisettrice y = x.
Il punto P serve solo per rendere più evidente lo spostamento.
Con le funzioni esponenziale e logaritmica abbiamo eseguito proprio una operazione di questo tipo per passare da una all'altra. Si dice in questo caso che le due funzioni sono una **inversa** rispetto all'altra.
La relazione importante che le lega è appunto questa: si può passare da una all'altra semplicemente effettuando un ribaltamento di 180° attorno alla bisettrice y = x.

Quindi possiamo confrontare le due funzioni guardando i due grafici, alla luce delle osservazioni precedenti (ricordiamo che a>1).



Notiamo da questo grafico che per ogni x>0 vale sempre (ricordiamo che a>1):

$$\log_a(x) < x$$

$$a^x > x$$

<u>ESERCIZIO:</u> Sfruttando le consocenze sulle funzioni esponenziale e logaritmica quando la base è 0<a<1, disegnare un grafico analogo a quello qui sopra e trovare l'analogo delle due proprietà appena scritte.

Proprietà dei logaritmi

1. Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei singoli termini della somma

$$\boxed{\log_n (A \cdot B) = \log_n A + \log_n B}$$

Se infatti chiamiamo $a = \log_n A$ e $b = \log_n B$ allora $n^a = A$ e $n^b = B$ quindi $AB = n^a \cdot n^b = n^{a+b}$

2. Il logaritmo di un rapporto è uguale alla differenza fra il logaritmo del numeratore e il logaritmo del denominatore

$$\boxed{\log_n \left(\frac{A}{B}\right) = \log_n A - \log_n B}$$

Si verifica come sopra, usando A/B invece di AB.

3. Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto del logaritmo della base per l'esponente

$$\boxed{\log_n A^s = s \cdot \log_n A}$$

Una potenza non è che un prodotto dove i fattori sono tutti uguali, quindi la proprietà 3 deriva dall'applicare s volte di seguito la proprietà 1 con B=A.

4. (CAMBIO DI BASE) Se voglio calcolare il logaritmo di c in base a, conoscendo un'altra base b, allora posso sfruttare il logaritmo della nuova base b in base a e calcolare:

$$\boxed{\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c}$$

In particolare, se c=a, allora

$$\log_a a = \log_a b \cdot \log_b a$$

Ma è $\log_a a = 1$ (dalla definizione di logaritmo), e perciò

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a$$

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$